

Téléportation quantique de qu-bits

Introduction

- « Les lois nouvelles de l'information quantique », J.-P. Delahaye, Pour la Science n° 250, pp 66-72, Août 1998
- « Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolski-Rosen Channels », Physical Review Letters, vol. 70, n°13, pp. 1895-1899 (mars 1993)

Partie 1 : Qu-bit(s)

L'objectif de cette partie est de comprendre la notion de qu-bit à travers des expériences manipulant un paramètre quantique décrivant l'état de polarisation d'une particule quantique bien connue, porteuse de l'information lumineuse : le photon.

Classiquement, la polarisation de la lumière est reliée à l'orientation du champ électrique de l'onde lumineuse. Plutôt que de travailler avec la description classique, nous allons plutôt considérer les *états de polarisation* des photons individuels qui composent le faisceau lumineux.

On décrit les états de polarisation d'un photon dans un espace de Hilbert de dimension 2. Dans cet espace, nous choisissons comme états de base les états de polarisations linéaires suivant la verticale (Ox) et l'horizontale (Oy) (cf. figure 1), notés : $|x\rangle$ et $|y\rangle$.

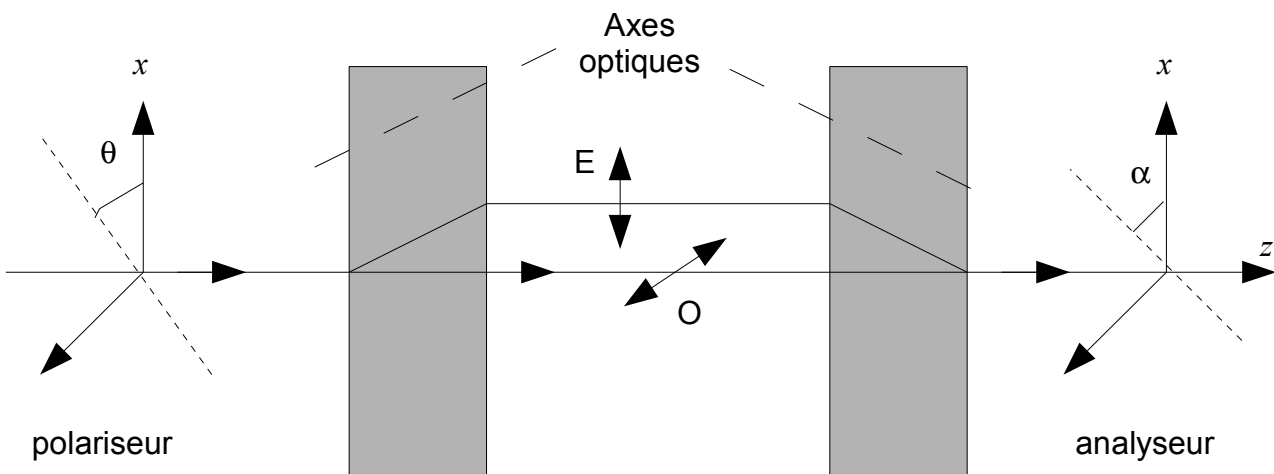


Figure 1 : Décomposition et recombinaison de polarisations à l'aide de lames biréfringentes. Le photon peut choisir le trajet E (extraordinaire), où il est polarisé suivant Ox , ou le trajet O (ordinaire), où il est polarisé suivant Oy .

Ces états sont définis physiquement par le fait que si le photon est dans l'état de polarisation $|x\rangle$ il passe dans un polariseur d'axe horizontal avec une probabilité de 1; s'il est dans l'état $|y\rangle$, il est absorbé par ce même polariseur (il passe avec la probabilité 0).

Par définition, ces états sont normés et orthogonaux : $\langle y|y\rangle = \langle x|x\rangle = 1$ et $\langle y|x\rangle = 0$.

La polarisation des photons peut être utilisée pour transmettre de l'information par exemple par une fibre optique. On décide arbitrairement, d'attribuer la valeur 0 du bit à un photon polarisé suivant Ox et la valeur 1 à un photon polarisé suivant Oy . En information quantique, les personnes

qui échangent de l'information sont appelés conventionnellement Alice et Bob. Alice envoie par exemple à Bob une suite de photons polarisés suivant $yyxyxyyx\dots$. Bob analyse la polarisation de ces photons à l'aide d'une lame biréfringente (cf. figure 1) et en déduit le message d'Alice 1101010011 .

De façon générale, un état quelconque de polarisation est noté : $|\phi\rangle = \lambda|x\rangle + \mu|y\rangle$, où α et β sont des nombres complexes tels que $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$.

1. Déterminer les valeurs de λ et μ lorsque l'état de polarisation du photon est linéaire et fait un angle θ avec la verticale Ox .
2. Déterminer la probabilité pour que le photon polarisé suivant θ traverse l'analyseur orienté suivant l'angle α (cf. figure 1). Quelle loi de l'optique ondulatoire reconnaissez-vous ?

A priori on peut faire varier l'angle θ continuellement, ce qui en un certain sens permet au qu-bit de prendre toutes les valeurs intermédiaires entre 0 et 1. Le qu-bit contiendrait donc une quantité infinie d'information !!

3. Pourquoi cet énoncé optimiste est-il immédiatement démenti lorsqu'on analyse le processus de mesure¹ ?

Dans la suite, nous noterons $|0\rangle$ et $|1\rangle$ les deux vecteurs de base de l'espace de Hilbert des qu-bits.

Nous nous intéressons maintenant à la manipulation de 2 qu-bits. Nous verrons que cette structure à 2 qu-bits est extraordinairement riche car elle introduit des corrélations quantiques (configuration dites *intriquées*) entre les 2 qu-bits qui sont à la base des spécificités de l'information quantique.

La construction d'un état à 2 qu-bits repose sur la notion de produit tensoriel². Pour construire mathématiquement un état à 2 qu-bits, nous supposons que le premier qu-bit, A, vit dans un espace de Hilbert H_A , dont une base orthonormée est $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$, et le second qu-bit dans un espace de Hilbert H_B , dont une base orthonormée est $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$. Il apparaît naturel de représenter un état physique où le premier qu-bit est dans l'état $|0\rangle_A$ et le second dans l'état $|1\rangle_B$ par un vecteur $|0_A 1_B\rangle = |01\rangle = |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B$. De cette façon, on construit une base de l'espace produit tensoriel $H_A \otimes H_B$, $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, dans laquelle peut agir le produit tensoriel de deux opérateurs M_A (agissant dans H_A) et M_B (agissant dans H_B), $M_A \otimes M_B$.

Dans l'espace $H_A \otimes H_B$, un état qui n'est pas de la forme dite *factorisée* $|\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle$ est appelé *état intriqué*. Examinons les propriétés de ces états intriqués avant d'en voir une application amusante : la téléportation quantique.

Prenons par exemple l'état intriqué à deux qu-bit : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

Supposons que nous voulions mesurer la probabilité de trouver le qu-bit A dans l'état 0 puis déterminer l'état du système à deux qu-bit après la mesure.

Rappelons que l'opération mathématique qui correspond à une mesure est une projection. Si l'on désire mesurer seulement le qu-bit A de l'état $|\psi\rangle$ dans l'état 0, on peut utiliser l'opérateur produit tensoriel :

$$M_{0_A} = (|0\rangle\langle 0|)_A \otimes I_B,$$

1 Malgré tout, cette « information cachée » dans la superposition linéaire peut être exploitée sous certaines conditions que nous examinerons dans la partie 3.

2 cf. annexe 1

où $(|0\rangle\langle 0|)_A$ est un opérateur de H_A correspondant au projecteur sur l'état $|0\rangle_A$ et I_B l'opérateur identité dans la base $\{|0\rangle_B, |1\rangle_B\}$ de H_B .

4. Déterminer l'expression matricielle de $(|0\rangle\langle 0|)_A$ dans la base $\{|0\rangle_A, |1\rangle_A\}$.
5. En utilisant le produit de Kronecker d'opérateurs¹ déterminer l'expression matricielle de l'opérateur M_{0_A} dans la base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.
6. En déduire via des produits matriciels la probabilité de trouver le qu-bit A dans l'état 0 lorsque l'état du système est $|\psi\rangle$, puis l'état du système à l'issue d'une mesure du qu-bit A.
7. Que dire de l'état du qu-bit B à l'issue de la mesure faite sur le qu-bit A ?

La situation obtenue précédemment peut paraître surprenante car on a l'impression que la mesure faite sur le qu-bit A dévoile instantanément (donc à une vitesse supérieure à celle de la lumière !!) l'information sur l'état du qu-bit B. Cette situation peu banale² ou deux objets quantiques sont fortement corrélés ne peut se satisfaire d'une explication classique (ou *locale*) : même si les qu-bits A et B sont éloignés de plusieurs années lumière, on ne peut pas les considérer comme des entités séparés³ et il n'existe pas de cas classique local susceptible de reproduire ces corrélations. Les qu-bits forment une entité unique, ils sont non séparables, en un mot ils sont intriqués.

Partie 2 : Logique quantiques

L'objectif de cette partie est de présenter les bases de la logique quantique. Certaines portes quantiques seront utilisées dans le cadre de la téléportation quantique abordée dans la partie suivante.

Il est facile de représenter des nombres entiers au moyen de qu-bits en calquant ce qui est fait avec des bits ordinaires. Supposons que nous voulions inscrire dans un registre de qu-bits un nombre entre 0 et 7. Un système de 3 qu-bits fera l'affaire en faisant correspondre ces nombres aux 8 états suivants⁴ :

$$0:|000\rangle \quad 1:|001\rangle \quad 2:|010\rangle \quad 3:|011\rangle \quad 4:|100\rangle \quad 5:|101\rangle \quad 6:|110\rangle \quad 7:|111\rangle .$$

La généralisation à n qu-bits se fait sans difficultés : pour représenter un nombre inférieur à $N = 2^n$, il faudra n qu-bits de l'espace de Hilbert produit tensoriel de rang n $H^{\otimes n} = H \otimes H \otimes \dots \otimes H$. La base de cet espace formée des 2^n vecteurs orthonormaux $\{|00\dots 00\rangle, |00\dots 01\rangle, \dots, |11\dots 11\rangle\}$ est appelée base de calcul.

Le calculateur quantique est constitué de portes logiques quantiques. La porte quantique la plus générale est une matrice unitaire $2^n \times 2^n$ opérant dans $H^{\otimes n}$.

On utilise couramment les portes suivantes qui n'agissent que sur un qu-bit :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

1 cf. annexe 1 paragraphe 4.

2 qui fut à l'origine d'une controverse sur l'interprétation de la mécanique quantique. Initiée en 1935 par Einstein, Podolski et Rosen (Phys. Rev. 47,777 (1935)).

3 On dit aussi que la mécanique quantique est une théorie non-locale.

4 La notation produit tensoriel est omise : par exemple $|010\rangle$ est la notation abrégée de $|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \otimes |0\rangle_C$

La porte *cNOT* ou *controled-NOT* est une porte à 2 qu-bits dont l'action sur un qu-bit $|xy\rangle$ est la suivante : elle ne modifie pas le qu-bit $|y\rangle$, ou qu-bit cible, si le qu-bit $|x\rangle$, ou qu-bit de contrôle, est dans l'état $|0\rangle$, et elle effectue sur le qu-bit cible l'échange $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ si le qu-bit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$. L'action de la porte *cNOT* est schématisée sur la figure 4. Le point noir représente le bit de contrôle et le cercle le bit cible. L'opération \oplus est l'addition modulo 2 (OU exclusif).

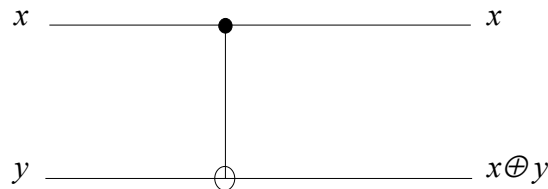


Figure 4. Porte *cNOT* controled-NOT. Le point noir représente le bit de contrôle et le cercle le bit cible.

La porte de Toffoli à 3 qu-bits est représentée sur la figure 5.

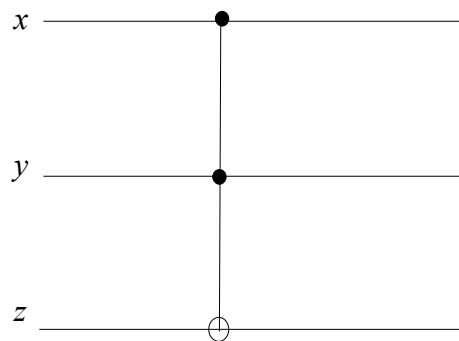


Figure 5. Porte de Toffoli.

1. Parmi les portes X , Y , Z , I et H laquelle est équivalent à l'opération logique *NOT* ?
2. Déterminer l'action de la porte de Hadamard H sur les vecteurs de la base de calcul $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
3. Déterminer l'expression de la matrice de l'opérateur *cNOT* dans la base de calcul $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.
4. Déterminer la table de vérité de la porte *cNOT*.
5. Déterminer la table de vérité de la porte de Toffoli (cf. figure 5). Montrer que si $z = 1$, cette porte effectue l'opération NAND¹.

Partie 3 : Téléportation quantique

La *téléportation* (cf. figure 2) est une application amusante des états intriqués et du calcul quantique, qui pourrait avoir des applications dans le transfert de l'information quantique.

Supposons qu'Alice souhaite transférer à Bob l'information sur l'état de polarisation d'un

¹ La porte de Toffoli est ainsi considérée comme une porte universelle car elle permet de réaliser toutes les opérations de la logique booléenne.

photon¹ A $|\phi_A\rangle = \lambda|0\rangle_A + \mu|1\rangle_A$ qui lui est a priori inconnu, sans lui transmettre directement le photon A.

Elle ne peut pas faire une mesure de polarisation du photon A car toute mesure projetterait $|\phi_A\rangle$ sur un autre état. Le principe consiste à utiliser une paire auxiliaire de photons intriqués B et C partagée par Alice et Bob. Ces photons B et C se trouvent par exemple dans l'état intriqué :

$$|\psi_{BC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_B 0_C\rangle + |1_B 1_C\rangle) .$$

L'état initial des trois photons est donc :

$$|\psi_{ABC}\rangle = (\lambda|0\rangle_A + \mu|1\rangle_A) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_B 0_C\rangle + |1_B 1_C\rangle) .$$

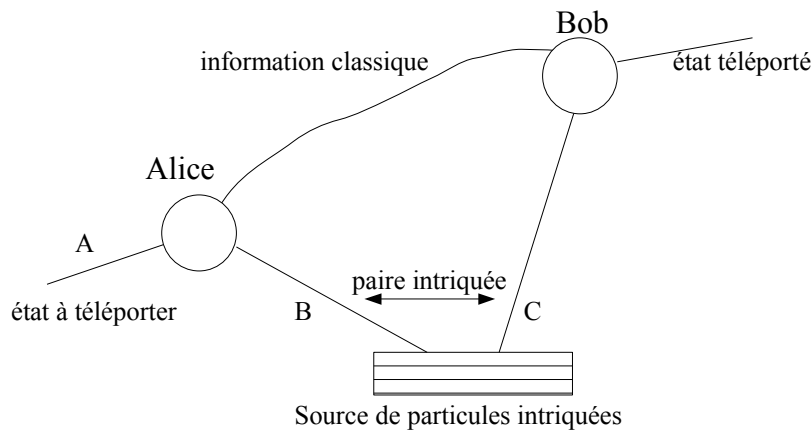


Figure 2. Téléportation : Alice effectue une mesure de Bell sur les qu-bits A et B et informe Bob du résultat par une voie classique.

La procédure de téléportation est la suivante :

- (1) Alice applique d'abord sur les qu-bits A et B une porte *cNOT*, le qu-bit A jouant le rôle du qu-bit de contrôle et le qu-bit B celui de qu-bit de cible.
- (2) Alice applique ensuite une porte de Hadamard sur le qu-bit A
- (3) Alice mesure conjointement les 2 qu-bits A et B dans la base $\{|0_A 0_B\rangle, |0_A 1_B\rangle, |1_A 0_B\rangle, |1_A 1_B\rangle\}$.
- (4) Alice informe Bob par une voie classique (téléphone, internet,...) la façon de reconstituer le qu-bit A.

8. Exprimer $|\psi_{ABC}\rangle$ sous la forme :

$$|\psi_{ABC}\rangle = a_1|0_A 0_B 0_C\rangle + a_2|0_A 1_B 1_C\rangle + a_3|1_A 0_B 0_C\rangle + a_4|1_A 1_B 1_C\rangle .$$

9. Déterminer le nouvel état $|\psi'_{ABC}\rangle$ après la procédure (1).

10. Déterminer le nouvel état $|\psi''_{ABC}\rangle$ après la procédure (2).

11. Déterminer les 4 résultats possibles pour la mesure de la procédure (3).

12. Déterminer les transformations (matrices) que Bob aura à opérer sur son qu-bit C sur les bon

1 Ou d'une particule de spin $\frac{1}{2}$, dans ce cas les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ correspondent par exemple aux états de spin de $-1/2$ et $+1/2$ en projection sur Oz .

conseils d'Alice pour récupérer un état semblable au qu-bit A d'Alice.

Remarques :

- à aucun moment moment $|\phi_A\rangle$ n'est mesurer. D'ailleurs celui-ci est détruit au cours de la mesure faite par Alice sur $|\psi''_{ABC}\rangle$. Il ne s'agit donc pas d'un clonage de qu-bit mais bien d'une téléportation¹.
- Bob ne connaît l'état de la particule C que lorsqu'il a reçu le résultat de la mesure d'Alice. La transmission de cette information devant se faire par une voie classique, il n'y a donc pas transmission instantanée de l'information à distance.
- Il n'y a pas de transport de matière dans la téléportation.

Partie 4 : Réalisation et manipulation physique d'un qu-bit

Dans cette partie, on se propose de montrer une réalisation physique qu-bit. Le record du nombre de qu-bits manipulés physiquement a été établi en 2001 en utilisant la Résonance Magnétique Nucléaire. Cette technique utilisée principalement pour déterminer la structure de molécules d'intérêt chimique ou biologique, repose sur l'interaction entre le spin 1/2 d'un proton² et la superposition d'un champ magnétique statique $B_0 \vec{z}$ et radiofréquence (RF) $B_1(\vec{x} \cos \omega t - \vec{y} \sin \omega t)$ ³. Dans ce cadre les qu-bits sont bien entendu les protons ou plus spécifiquement leur spin.

On admettra que le hamiltonien décrivant une telle interaction s'écrit⁴ :

$$H(t) = \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{i\omega t} \\ \omega_1 e^{-i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix},$$

avec $\omega_0 = \gamma_p B_0$ et $\omega_1 = \gamma_p B_1$ où le paramètre γ_p est le facteur gyromagnétique du proton.

On s'intéresse à l'évolution d'un vecteur d'état sous la forme :

$$|\phi(t)\rangle = \lambda(t)|0\rangle + \mu(t)|1\rangle, \text{ avec } |\lambda(t)|^2 + |\mu(t)|^2 = 1.$$

1. En écrivant l'équation de Schrodinger matriciellement, déterminer le système d'équations différentielles couplées auquel obéissent $\lambda(t)$ et $\mu(t)$. On mettra ce système sous la forme :

$$i \frac{d\lambda(t)}{dt} = \dots$$

$$i \frac{d\mu(t)}{dt} = \dots$$

2. En posant $\lambda(t) = \hat{\lambda}(t)e^{i\omega_0 t/2}$ et $\mu(t) = \hat{\mu}(t)e^{-i\omega_0 t/2}$ réécrire le système sous la forme :

1 Le clonage d'un qu-bit est une procédure impossible en physique quantique (cf. théorème de non clonage en complément)

2 Celui d'une molécule d'eau par exemple, exploité dans le cadre de l'IRM (Imagerie par Résonance Magnétique)

3 Cas d'une OPPM polarisée circulairement

4 Pour bien comprendre ce qui suit se reporter au poly pp 158-164.

$$i \frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = \dots$$

$$i \frac{d\hat{\mu}(t)}{dt} = \dots$$

3. Montrer que dans le cas de la résonance $\omega = \omega_0$, la solution du système est alors :

$$\hat{\lambda} = a \cos(\omega_1 t/2) + b \sin(\omega_1 t/2)$$

$$\hat{\mu} = ia \sin(\omega_1 t/2) + ib \cos(\omega_1 t/2)$$
4. Partant d'un qu-bit initial $|\phi(0)\rangle = |0\rangle$ i.e. $\lambda(0)=1$ et $\mu(0)=0$, déterminer l'expression de la probabilité $p_{0 \rightarrow 1}(t)$ pour que le qu-bit se retrouve dans l'état $|1\rangle$. Représenter graphiquement $p_{0 \rightarrow 1}(t)$.
5. Dédire de l'expression de $p_{0 \rightarrow 1}(t)$, qu'au bout d'un temps $t = t_{\pi/2}$ le qu-bit est dans un état de superposition de $|0\rangle$ et de $|1\rangle$.
6. Montrer qu'au bout du temps $t = t_{\pi/2}$, on peut réaliser une porte de Hadamard, à des facteurs de phase près sur $|0\rangle$ et $|1\rangle$.
7. Combien de temps faut-il laisser le champ RF pour réaliser à un facteur de phase près une porte X ?

Conclusion

Complément : Théorème de non clonage quantique

Pour montrer ce théorème, supposons que l'on souhaite dupliquer un état quantique inconnu $|\phi\rangle$. Le système sur lequel on veut imprimer la copie est noté $|\phi_c\rangle$: c'est l'équivalent de la feuille blanche. Par exemple si l'on veut cloner un état de spin $\frac{1}{2}$, $|\phi_c\rangle$ doit aussi être un état de spin $\frac{1}{2}$. L'évolution du vecteur d'état dans le processus de clonage doit être de la forme :

$$|\phi\rangle \otimes |\phi_c\rangle \rightarrow |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle .$$

Cette évolution est nécessairement régie par un opérateur unitaire U qu'il n'est pas nécessaire de préciser.

$$U[|\phi\rangle \otimes |\phi_c\rangle] = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle .$$

U doit être universel car l'opération de copie ne peut pas dépendre de l'état à copier et donc indépendant de $|\phi\rangle$.

On cherche à cloner un second état $|\phi'\rangle$.

1. Calculer $U[|\phi'\rangle \otimes |\phi_c\rangle]$.
2. Evaluer le produit scalaire $(\langle\phi| \otimes \langle\phi_c|)U^\dagger U(|\phi'\rangle \otimes |\phi_c\rangle)$ en fonction de $\langle\phi|\phi'\rangle$.
3. U étant unitaire, que vaut le produit d'opérateur $U^\dagger U$? Tenant compte de cela, recalculer $(\langle\phi| \otimes \langle\phi_c|)U^\dagger U(|\phi'\rangle \otimes |\phi_c\rangle)$ en fonction de $\langle\phi|\phi'\rangle$.
4. En déduire que soit $|\phi\rangle = |\phi'\rangle$, soit $\langle\phi|\phi'\rangle = 0$.
5. En déduire que l'on peut cloner un état $|\phi\rangle$ ou un état orthogonal, mais *pas une superposition linéaire de deux états quelconques*¹.

¹ C'est la une des grandes différences avec l'informatique classique où l'on peut copier à volonté n'importe quel donnée. Ceci explique aussi pourquoi les états de superposition sont utilisés en cryptographie quantique car le théorème de non clonage interdit à un espion de cloner des données échangées entre deux personnes.

Annexe 1 : Produits tensoriel d'espaces de Hilbert

1. Définition du produit tensoriel d'espaces de Hilbert

Pour définir généralement la notion de produit tensoriel d'espaces de Hilbert, considérons deux espaces de Hilbert E et F . On peut leur associer un troisième espace de Hilbert G et une application bilinéaire T du produit direct $E \times F$ dans G tels que :

- $T(E \times F)$ engendre G , c'est-à-dire que tout élément de G est somme (éventuellement infinie) d'éléments de la forme $T(|u\rangle, |v\rangle)$.
- Soit une base hilbertienne $\{|e_m\rangle\}$ de E et une base hilbertienne $\{|f_n\rangle\}$ de F . Alors la famille $\{T(|e_m\rangle, |f_n\rangle)\}$ est une base de G .

L'espace G est appelé produit tensoriel de E et F et noté $G = E \otimes F$. On pose $T(|u\rangle, |v\rangle) = |u\rangle \otimes |v\rangle$. Les éléments de $E \otimes F$ sont appelés tenseurs; ils ont, en vertu de ce qui précède, la forme générale :

$$|\phi\rangle = \sum_{m,n} C_{m,n} |e_m\rangle \otimes |f_n\rangle$$

Les éléments de la forme $|u\rangle \otimes |v\rangle$ sont dits *factorisés*. Tout tenseur s'écrit de façon non unique comme somme (éventuellement infinie) de tenseurs factorisés.

2. Espaces de Hilbert et degrés de liberté

Pour définir l'espace de Hilbert dans lequel on peut décrire complètement l'état d'un système quantique, introduisons la notion de degré de liberté d'un système. Une particule en mouvement dans l'espace a trois degrés de liberté. Un système de deux particules en mouvement dans l'espace a donc six degrés de liberté, etc. Une particule quantique peut également avoir un moment cinétique intrinsèque (son spin, i.e. son état de polarisation pour un photon), ce qui lui confère un degré de liberté supplémentaire.

Chaque degré de liberté est décrit dans un espace de Hilbert donné. Par exemple, le mouvement suivant x se décrit dans l'espace des fonctions de carré sommable de la variable x , $L^2(\mathbb{R})$. On postule qu'un système donné comportant N degrés de liberté est décrit dans l'espace de Hilbert E produit tensoriel des espaces de Hilbert respectifs E_i , $i=1,2,\dots,N$ dans lesquels sont décrits ces N degrés de liberté : $E = E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_N$.

3. Propriétés du produit tensoriel

a) Si E et F sont de dimension finie N_E et N_F , la dimension de $G = E \otimes F$ est $N_G = N_E N_F$.

b) Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il est commode d'utiliser les notations compactes :

$$|u\rangle \otimes |v\rangle = |u\rangle |v\rangle = |u, v\rangle$$

c) Le produit scalaire hermitien de deux kets factorisés $|\phi\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle$ et

$$|\chi\rangle = |u'\rangle \otimes |v'\rangle \text{ se factorise et vaut : } \langle \chi | \phi \rangle = \langle u' | u \rangle \langle v' | v \rangle$$

4. Opérateurs dans l'espace produit tensoriel

Considérons maintenant deux opérateurs A_E et B_F agissant respectivement dans E et F . On peut définir le produit tensoriel des opérateurs A_E et B_F : $C_G = A_E \otimes B_F$ par la règle :

$$(A_E \otimes B_F)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = (A_E |u\rangle) \otimes (B_F |v\rangle)$$

Cela permet de définir l'action de C_G sur les éléments de la base factorisée $\{|m\rangle \otimes |n\rangle\}$ et

par conséquent sur tout vecteur de $G = E \otimes F$.

En particulier, nous pouvons *prolonger* l'opérateur A_E dans G par $A_E = A_E \otimes I_F$, où I_F est l'opérateur identité dans F .

Pour calculer l'expression matricielle du produit tensoriel de deux matrices 2x2, on utilise le produit de Kroneker :

si les opérateurs s'expriment :

$$A_E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dans } \{|e_1\rangle, |e_2\rangle\} ,$$

$$B_F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ dans } \{|f_1\rangle, |f_2\rangle\} ,$$

$$\text{alors } A_E \otimes B_F = \begin{pmatrix} aB_F & bB_F \\ cB_F & dB_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\gamma & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{pmatrix} \text{ dans } \{|e_1 f_1\rangle, |e_1 f_2\rangle, |e_2 f_1\rangle, |e_2 f_2\rangle\} .$$

5. Exemple simple : boîte cubique

Dans l'étude quantique d'une particule dans une boîte cubique tri-dimensionnelle de côté L , il est commode de séparer le mouvement de la particule suivant x , y , z et de chercher les solutions particulières de la forme :

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \psi_{n_1} \psi_{n_2} \psi_{n_3} \propto \sin(n_1 \pi x/L) \sin(n_2 \pi y/L) \sin(n_3 \pi z/L) .$$

Dans la terminologie du produit tensoriel, ce sont des tenseurs décomposables. Une fonction d'onde générale peut alors s'écrire en fonction de cette base factorisée :

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n_1, n_2, n_3} C_{n_1, n_2, n_3} \psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) .$$

Des exemples plus subtils de produits tensoriels d'espaces de Hilbert concernent les cas de particules ayant des degrés de liberté internes, par exemple un spin.