Paradoxe EPR

Introduction

Extrait d'une traduction de la conférence d'Alain Aspect, donnée en la mémoire de John Bell à Vienne en Décembre 2000[1].

« Le problème de l'interprétation du formalisme quantique, et en particulier de son caractère définitivement probabiliste, a donné lieu à des débats homériques entre N. Bohr et A. Einstein de la fin des années 1920 jusqu'à la disparition des protagonistes au début des années 1950. La mécanique quantique était largement acceptée par la plupart des physiciens contemporains, pourtant Einstein et De Broglie, et dans une certaine mesure Schrödinger, restaient profondément troublés par cet aspect probabiliste du formalisme à la différence de Bohr qui en avait fait la clé de voûte de l'interprétation de la nouvelle théorie connue sous le nom « *d'interprétation de Copenhague* ».

Un moment culminant de ces débats fut la publication en 1935 du célèbre article « EPR »[2] (Einstein, Podolsky, et Rosen) dont le titre pose la question : « La description quantique de la réalité physique peut-elle être considérée comme complète ? ». Dans cet article, Einstein et ses coauteurs montrent que le formalisme quantique prédit l'existence d'états particuliers de deux particules, par exemple deux électrons, caractérisés par de très fortes corrélations à la fois des vitesses et des positions (figure 1).

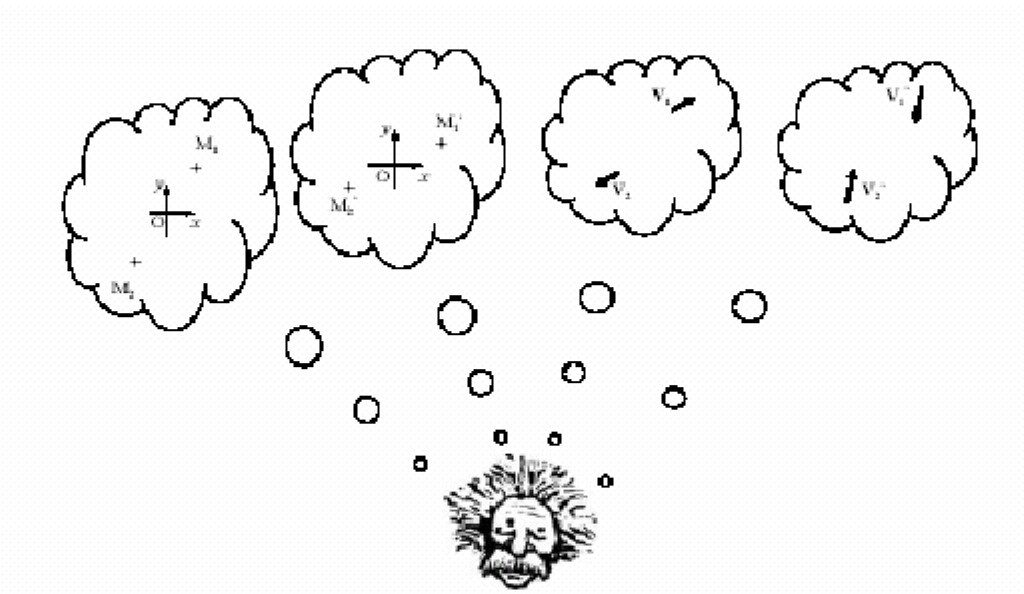

Figure 1. Expérience de pensée (gedankenexperiment) d'Einstein, Podolski et Rosen (1935)

Plus précisément, pour un état EPR, le formalisme quantique prédit que des mesures de position sur chacun des deux électrons donneront des valeurs symétriques par rapport à l'origine et que des mesures de vitesses donneront de même des résultats toujours opposés. Dans de tels états, il suffit donc de mesurer la vitesse d'un électron pour connaître avec certitude celle de l'autre électron ou de mesurer la position du premier électron pour connaître avec certitude celle du second. Les

1 On peut retrouver cette conférence en anglais dans « Quantum [Un]speakables – From Bell to Quantum Information », edited by R. A. Bertlmann and A. Zeilinger, Springer (2002)

2 cf. ref 1 de l'article en support du B.E.

deux électrons étant éloignés l'un de l'autre, le choix de la grandeur à mesurer ne peut modifier l'état du second. Einstein, Podolsky et Rosen en déduisent que le second électron possédait, avant la mesure, des valeurs parfaitement déterminées de vitesse et de position (appélés paramètres supplémentaires ou variables cachées). Comme le formalisme quantique ne peut pas donner de valeur précise simultanée de vitesse et de position (comme le montrent les relations d'incertitudes de Heisenberg), les auteurs concluent que le formalisme est incomplet, c'est-à-dire qu'il ne rend pas compte de la totalité de la réalité physique, et qu'il faut donc s'attacher à essayer de le compléter.

Niels Bohr fut semble-t-il boulversé par cet argument qui s'appuie justement sur le formalisme quantique lui-même pour en montrer le caractère incomplet, provisoire. Ses écrits montrent sa conviction profonde que, si le raisonnement « EPR » était correct, compléter le formalisme quantique ne serait pas suffisant, c'est toute la physique quantique qui s'effondrerait. Bohr contesta donc immédiatement ce raisonnement, en affirmant que dans un état quantique de ce type « non factorisable », on ne peut parler des propriétés individuelles de chaque électron, et cela même s'il sont très éloignés l'un de l'autre. Avec Schrodinger, qui découvrit en même temps ces états étonnants, on allait désormais parler d'états « intriqués », pour indiquer que les deux électrons sont indissolublement enchevêtrés : *ils forment un objet unique quelque soit leur distance de séparation*.

Cette question focalisa l'essentiel du débat ultérieur entre les deux physiciens. Pourtant, notons d'emblée qu'Einstein ne contestait nullement la justesse des prédictions du formalisme quantique : la controverse portait sur l'interprétation de ce formalisme.

On pourrait penser que ce débat entre deux géants de la physique du XX^{ème} siècle eût un immense écho. En fait lorsque l'article « EPR » parut en 1935, la Mécanique Quantique allait de succès en succès et, mis à part Bohr, la plupart des physiciens ignorèrent ce débat qui leur paraissait académique : il semblait que l'adhésion à l'une ou l'autre des positions fût une affaire de goût personnel (ou de position épistémologique) sans aucune conséquence pratique sur la mise en oeuvre du formalisme quantique, ce qu'Einstein lui-même ne semblait pas contester. Il fallut attendre trente ans pour voir paraître un démenti cinglant à cette position relativement consensuelle.

La situation fut radicalement bouleversée en 1965, lorsque John Bell découvrit que si l'on suit jusqu'au bout les idées d'Einstein, on abouti, dans certaines situations très rares, appelées « états EPR » à une contradiction quantitative avec les prédictions quantiques. Le débat initialement de nature épistémologique devenait une question scientifique, susceptible d'être tranchée expérimentalement. De telles expériences allaient effectivement être menées à partir des années 1970. »

L'objectif de ce Bureau d'Etude est d'étudier les propriétés « d'états EPR » (ou « états intriqués » qui permettent de trancher la controverse « EPR » entre Einstein et Bohr. Cette étude s'effectuera avec comme fil directeur l'article suivant :

« Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A new Violation of Bell's Inequalities », A. Aspect, P. Gangier, and G. Roger, Physical Review Letter 49, 91 (1982)).

Cet article rapporte la première preuve expérimentale incontestable de violation des inégalités de Bell.

Partie I : Compréhension des articles

L'objectif est de s'assurer d'une bonne compréhension de l'article en admettant provisoirement les résultats théoriques.

1. Résumer en quelques lignes les enjeux de l'expérience rapportée dans l'article.
2. Expliquer le principe de l'experience en indiquant les rôles de chaque composants.
3. Quelles sont les principaux problèmes rencontrés lors de ces expériences ?
4. Expliquer à l'aide d'un schéma comment sont produits les paires de photons corrélés.
5. Décrire les caractéristiques des photons corrélés (longueur d'onde, taux d'émission, puissance lumineuse,...)

Partie II : Etats de polarisation d'un photon

L'objectif de cette partie est de modéliser les états de polarisation d'un photon.

Classiquement, la polarisation de la lumière est reliée à l'orientation du champ électrique de l'onde lumineuse. Plutôt que de travailler avec la description classique, nous allons plutôt considérer les *états de polarisation* des photons individuels qui composent le faisceau lumineux.
On décrit les états de polarisation d'un photon dans un espace de Hilbert de dimension 2. Dans cet espace, nous choisissons comme états de base les états de polarisations linéaires suivant l'horizontal et la verticale, notés : $|\uparrow\rangle$ et $|\rightarrow\rangle$.

Ces états sont définis physiquement par le fait que si le photon est dans l'état de polarisation $|\rightarrow\rangle$ il passe dans un polariseur d'axe horizontal avec une probabilité de 1; s'il est dans l'état $|\uparrow\rangle$, il est absorbé par ce même polariseur (il passe avec la probabilité 0.
Par définition, ces états sont donc orthogonaux : $\langle\uparrow|\rightarrow\rangle=0$.

De façon générale, un état quelconque de polarisation est noté : $|\phi\rangle=\alpha|\rightarrow\rangle+\beta|\uparrow\rangle$, où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$.

Notons $|\theta\rangle$ l'état d'un photon de polarisation linéaire dans la direction faisant un angle θ avec l'axe horizontal $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

1. Déterminer l'expression de $|\theta\rangle$ en fonction de l'angle θ , $|\uparrow\rangle$ et $|\rightarrow\rangle$.
2. Déterminer l'expression d'un état de polarisation circulaire en fonction de $|\uparrow\rangle$ et $|\rightarrow\rangle$.

L'opérateur A_θ associé à une mesure de la polarisation du photon dans la direction θ est le projecteur sur l'état $|\theta\rangle$.

3. Rappeler la définition de l'opérateur projecteur sur un état quelconque $|u\rangle$.
4. Déterminer l'expression de la matrice de l'opérateur A_θ dans la base $(|\uparrow\rangle,|\rightarrow\rangle)$.
5. Vérifier que les valeurs propres de A_θ sont 1 et 0 et déterminer les vecteurs propres associés.
6. Déterminer la probabilité pour qu'un photon initialement dans l'état $|\rightarrow\rangle$ passe à travers un polariseur orienté dans la direction θ . Vérifier que l'on retrouve la loi « classique » de

Malus.

7. Montrer que les dispositifs de mesure des polarisations de la figure 1 de l'article est analogue à un appareil de Stern et Gerlach pour un spin 1/2.

Dans la suite du problème on notera + ou – les résultats des mesures de polarisation correpondants respectivement à une polarisation linéaire parallèle et perpendiculaire à l'axe de l'analyseur (ces résultats sont notés +1 ou -1 sur la figure 1 de l'article).

On note $P_{\pm}(a)$ (resp. $P_{\pm}(b)$) la probabilité simple d'obtenir le résultat ± sur le photon « 1 » (resp. « 2 »)[1] quelque soit l'état du photon « 2 » (resp. « 1 »).

On note comme dans l'article $P_{\pm\pm}(a,b)$ les probabilités de mesures conjointes sur les photons « 1 » et « 2 ». Par exemple, $P_{+-}(a,b)$ représente la probabilité de mesurer « en même temps » le photon « 1 » dans un état de polarisation parallèle à l'axe de l'analyseur $\vec{a}$ et le photon « 2 » dans un état de polarisation perpendiculaire à l'axe de l'analyseur $\vec{b}$.

Partie III : Paire de photons indépendants

L'objectif de cette partie est d'étudier une paire de photons indépendants, système quantique caratérisé par une fonction d'onde « factorisée ».

On considère le système de la figure 1 de l'article constitué de deux 2 photons « 1 » et « 2 » émis par une source S, s'éloignant dans des directions opposées suivant un axe que nous noterons Oz orienté de l'analyseur $\vec{a}$ vers l'analyseur $\vec{b}$. On note xOy le plan orienté perpendiculaire à Oz de sorte que Oxyz forme un repère orthonomormé direct.

On suppose qu'après dissociation, la paire de photon est dans l'état de polarisation :

$$|\psi(1,2)\rangle = |\rightarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \quad .$$

Cet état est appelé « état factorisé »[2].

On suppose $\vec{a}$ et $\vec{b}$ inclinés à 45° par rapport à l'horizontale.

1. Calculer les probabilités $P_{\pm}(a)$ et $P_{\pm}(b)$.
2. Ayant trouvé + en mesurant la polarisation du photon « 1 », quel est l'état du système après la mesure ? L'état de polarisation du photon « 2 » est-il perturbé par cette mesure ?
3. Calculer les probabilités $P_{\pm\pm}(a,b)$.
4. Calculer le coefficient de corrélation définit par la formule (1) de l'article.
5. Interpréter physiquement l'état $|\psi(1,2)\rangle$.

Partie IV : Paire de photons intriqués

L'objectif de cette partie est d'établir l'expression du coefficient de corrélation pour le comparer aux résultats de la figure 3 de l'article, puis de construire une image « physique » d'une paire EPR.

1 Cas d'une « détection simple »

2 Se reporter à l'annexe 1 pour la représentation d'un système à plusieurs degrés de libertés (ici les deux états de polarisation des photons) à l'aide du formalisme « produit tensoriel »

On suppose qu'après dissociation, la paire de photon est dans l'état de polarisation :

$$|\psi(1,2)\rangle = (1/\sqrt{2})(|\rightarrow\rangle_1 \otimes |\rightarrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2) \quad .$$

Cet état « non factorisé » est caractéristique d'une paire de photons intriqués.

Les analyseurs sont orientés dans des directions quelconques et on note α l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1. Calculer les probabilités $P_{\pm}(a)$ et $P_{\pm}(b)$. Interprétation ?

Nous allons calculer les probabilités $P_{\pm\pm}(a,b)$ par deux méthodes différentes.

2. Calculer directement $P_{\pm\pm}(a,b)$ en fonction de α en projetant le vecteur d 'état sur le vecteur propre associé à chaque mesure conjointe particulière.

Le précedent calcul portant sur des vecteurs d'états décrivant globalement les 2 photons dans un espace abstrait, il est difficile d'en extraire une image dans notre espace ordinaire.

Pour décrire séparement les deux mesures aux deux extrémités opposées de l'expérience, on peut décomposer la mesure conjointe en deux étapes. Supposons par exemple que la mesure sur le photon « 1 » soit faite en premier.

3. Déterminer la probabilité pour que le résultat de cette première mesure soit + ?
4. Déterminer l'état $|\psi'(1,2)\rangle$ du système à l'issue de cette première mesure. Attention l'espace propre associé à la valeur propre + est de dimension 2.
5. Que dire de l'état de polarisation du photon « 2 » après cette première mesure (alors qu'on peut supposer que ce photon n'a pas encore interagi avec l'analyseur $\vec{b}$) ? Quel état de polarisation pensions-nous plutôt trouver pour le photon « 2 » d'après les résultats de la question 1 ? Peut-on parler de téléportation ?
6. Calculer $P_{\pm\pm}(a,b)$ et vérifier que vous retrouvez bien le résultat de la question 2.
7. Déterminer et représenter graphiquement le coefficient de corrélation en fonction de α . Comparer votre graphique avec celui de la figure 3 de l'article.

Les conclusions tirées des résultats des questions 4 et 5, en apparente contradiction avec le principe de causalité (et la physique relativiste), ont poussé Einstein à invoquer l'existence d'une propriété préalable commune aux deux photons.

Considérons le cas particulier où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles :

8. Quelles sont les valeurs de $P_{\pm\pm}(a,b)$?
9. Que dire de la polarisation du photon « 2 » lorsque que celle du photon « 1 » est + (resp. -) ?
10. Peut-on invoquer une propriété commune à cette paire avant les mesures[1] ?
11. Que doit-on admettre sur l'état du système pour reproduire tous les résultats ?

---

1 Le cas de correlations entre mesures distantes sur deux systèmes ayant intéragi est courant en physique classique. Par exemple si un système mécanique de moment cinétique total nul se fragmente en deux sous l'effet d'une répulsion interne, les moments cinétiques des deux fragments resteront exactement opposés à tout instant ultérieur, en l'absence de force externe. Plus généralement, même en présence de forces, les deux moments cinétiques resteront corrélés, puisque leurs valeurs à tout instant sont déterminés par les valeurs initiales qui étaient exactement opposées.

En conclusion, il semble possible de comprendre les corrélations EPR par une image de type classique, impliquant des paramètres supplémentaires ou « variables cachées » différentes d'une paire à l'autre. On peut espérer retrouver les prédictions statistiques de la mécanique quantique lorsqu'on moyenne sur ces paramètres supplémentaires. Il semble que tel était la position d'Einstein. Notons qu'à cette étape, une telle position n'est pas en contradiction avec la Mécanique Quantique : il n'y a aucun problème logique à admettre pleinement les prédictions quantiques, tout en invoquant des paramètres supplémentaires donnant une image acceptable des corrélations EPR.

Partie VI : Inégalités de Bell - Théorie à variables supplémentaires - Conflit avec la mécanique quantique

L'objectif de cette partie est de démontrer les inéquations (2) de l'article et de mettre en évidence le conflit de la théorie quantique avec celle d'une théorie à variable supplémentaire.

Bell traduisit en terme mathématiques les conséquences de la discussion ci-dessus, et il introduisit explicitement des paramètres supplémentaires, notés λ . La distribution de ces paramètres sur un ensemble de paires émises est spécifiée par une densité de probabilité $\rho(\lambda)$, qui décrit la façon dont les paires sont émises, telle que :

$$\rho(\lambda)\geq 0$$
$$\int \rho(\lambda)d\lambda=1$$

Pour une paire donnée, caractérisée par un paramètre supplémentaire, λ , les résultats de mesures sont donnés par des fonctions qui peuvent prendre 2 valeurs :

$A(\lambda,\vec{a})=\pm 1$ à l'analyseur $\vec{a}$

$B(\lambda,\vec{b})=\pm 1$ à l'analyseur $\vec{b}$

Une théorie à paramètres supplémentaires est complètement définie par la forme explicite des fonctions $\rho(\lambda)$, $A(\lambda,\vec{a})$ et $B(\lambda,\vec{b})$.

1. En remarquant que la fonction $\frac{1}{2}[A(\lambda,\vec{a})+1]$ prend la valeur +1 pour le résultat + et 0 pour le résultat -, déterminer l'expression de $P_+(a)$
2. En remarquant que la fonction $\frac{1}{2}[1-B(\lambda,\vec{b})]$ prend la valeur +1 pour le résultat - et 0 pour le résultat +, déterminer l'expression de $P_{+-}(a,b)$.
3. En déduire l'expression du coefficient de corrélation E(a,b).

Considérons la quantité :

$$s(\lambda,\vec{a},\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=A(\lambda,\vec{a})B(\lambda,\vec{b})-A(\lambda,\vec{a})B(\lambda,\vec{b}')+A(\lambda,\vec{a}')B(\lambda,\vec{b})+A(\lambda,\vec{a}')B(\lambda,\vec{b}')$$

4. Montrer que $s(\lambda,\vec{a},\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=\pm 2$.
5. En déduire que : $-2\leqslant\int s(\lambda,\vec{a},\vec{b},\vec{a}',\vec{b}')d\lambda\leqslant 2$.
6. En déduire que les inéquations (2) de l'article que doit nécessairement vérifier une théorie à variables supplémentaires.
7. En utilisant la configuration expérimentale décrite dans l'article (p. 93), déterminer la valeur théorique du paramètre *S*. Comparer aux résultats expérimentaux (4) et (6) de l'article.

Partie VIII : Non-localité – Bilan et conclusions

A ce point nous avonc donc trouvé une situation où les prédictions de la mécanique quantique ne peuvent être simulées par une théorie à variables supplémentaires. L'objectif est maintenant de mettre en évidence une hypothèse particulière responsable du conflit.

Une des hypothèses retenue par J. Bell est *l'hypothèse de localité*. Remarquons en effet que, dans le formalisme de la théorie à paramètres supplémentaires, nous avons supposé implicitement que le résultat $A(\lambda, \vec{a})$ de la mesure par l'analyseur $\vec{a}$ ne dépend pas de l'orientation de $\vec{b}$ du second analyseur et vice-versa. De même, on suppose que la densité de probabilité $\rho(\lambda)$ (qui décrit la façon dont les paires sont émises) ne dépend pas des orientations $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Cette *condition de localité* est cruciale : les inégalité de Bell ne s'appliqueraient pas à un formalisme ne le respectant pas.

> Montrer que pour des fonctions $A(\lambda, \vec{a}, \vec{b})$ ou $\rho(\lambda, \vec{a}, \vec{b})$ le résultat de la question 5 de la partie VII n'est plus valable.

On peux alors conclure que la mécanique quantique est *non locale* tout comme le laissait penser les résultats de la partie V montrant qu'une mesure sur l'un des photons de la paire affecte l'état de l'autre photon. On ne peux « séparer » les deux photons d'une paire EPR (i.e. leur fonction d'onde est non factorisable) et l'on doit traiter cette paire comme un unique système quantique même si les photons sont très éloignés l'un de l'autre.

Pour conclure, voici un extrait de l'article : « Des intuitions d'Einstein à l'information quantique : les stupéfiantes propriétés de l'intrication », A. Aspect et P. Gangier, Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et Chimie (B.U.P.), n°875 (juin 2005) dont je vous conseille vivement la lecture pour une synthèse très complète (et en français) sur le sujet.

« Quelles conclusions tirer de la violation des inégalités de Bell ? Tout d'abord, nous devons accepter l'idée que le monde ne peut pas toujours se concevoir comme formé de sous-systèmes séparés, dont les propriétés physiques seraient définies localement et ne sauraient s'influencer mutuellement lorsque les systèmes sont séparés au sens relativiste. Cette notion de « séparabilité » semblait pourtant tellement fondamentale à Einstein qu'il en avait fait la pierre angulaire de sa démonstration de la nécessité de compléter la mécanique quantique. Aujourd'hui, avec la violation des inégalités de Bell, il nous faut renoncer à la vison « réaliste locale » du monde que défendait Einstein. Afin de ne pas commettre d'anachronisme, il convient de replacer sa position dans une perspective historique : Einstein ne savait pas qu'il y avait incompatibilité irréductible entre sa vision du monde et les prédictions quantitative de la mécanique quantique puisque cette incompatibilité ne devait être établie qu'en 1964 par Bell. Ses écrits montre au contraire qu'il était convaincu de la possibilité de compléter le formalisme de la mécanique quantique sans en remettre en cause les prédictions au niveau probabiliste.

A l'issue d'un voyage de sept décennies, qui nous a mené de l'article EPR (1935) aux inégalités de Bell (1964) et aux expériences qu'elles ont suscitées, on pourrait avoir le sentiment frustrant d'une conclusion négative : les propriétés avérées de l'intrication quantiques nous force à renoncer à une vision réaliste locale. En fait, ce renoncement est porteur d'immense progrès potentiels : on commence à savoir tirer parti des propriétés quantiques que nous venons de voir, dans des concepts nouveaux de traitement et de transmission de l'information[1], où l'intrication quantique joue un rôle central... ».

1 On peut citer l'information quantique, la crypographie quantique, le calcul quantique,...

Annexe 1 : Produits tensoriel d'espaces de Hilbert

1. Définition du produit tensoriel d'espaces de Hilbert

Pour définir généralement la notion de produit tensoriel d'espaces de Hilbert, considérons deux espaces de Hilbert ***E*** et ***F***. On peut leur associer un troisième espace de Hilbert ***G*** et une application bilinéaire T du produit direct ***E***⊗***F*** dans ***G*** tels que :

- *T(**E**⊗**F**)* engendre ***G***, c'est-à-dire que tout élément de ***G*** est somme (éventuellement infinie) d'éléments de la forme $T(|u\rangle, |v\rangle)$.
- Soit une base hilbertienne $\{|e_m\rangle\}$ de ***E*** et une une base hilbertienne $\{|f_n\rangle\}$ de ***F***. Alors la famille $\{T(|e_m\rangle, |f_n\rangle)\}$ est une base de ***G***.

L'espace G est appelé produit tensoriel de E et F et noté ***G*** = ***E***⊗***F***. On pose $T(|u\rangle, |v\rangle) = |u\rangle \otimes |v\rangle$.
Les éléments de ***E***⊗***F*** sont appelés tenseurs; ils ont, en vertu de ce qui précède, la forme générale :

$$|\phi\rangle = \sum_{m,n} C_{m,n} |e_m\rangle \otimes |f_n\rangle \quad .$$

Les éléments de la forme $|u\rangle \otimes |v\rangle$ sont dits *factorisés*. Tout tenseur s'écrit de façon non unique comme somme (éventuellement infinie) de tenseurs factorisés.

2. Espaces de Hilbert et degrés de liberté

Pour définir l'espace de Hilbert dans lequel on peut décrire complètement l'état d'un système quantique, introduisons la notion de degré de liberté d'un système. Une particule en mouvement dans l'espace a trois degrés de liberté. Un système de deux particules en mouvement dans l'espace a donc six degrés de liberté, etc. Une particule quantique peut également avoir un moment cinétique intrinsèque (son spin, i.e. son état de polarisation pour un photon), ce qui lui confère un degré de liberté supplémentaire.

Chaque degré de liberté est décrit dans un espace de Hilbert donné. Par exemple, le mouvement suivant x se décrit dans l'espace des fonctions de carré sommable de la variable x, $L^2(R)$. On postule qu'un système donné comportant N degrés de liberté est décrit dans l'espace de Hilbert ***E*** produit tensoriel des espace de Hilbert respectifs $\boldsymbol{E_i}$, i=1,2,...,N dans lesquels sont décrits ces N degrés de liberté : $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} \otimes \boldsymbol{E_2} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{E_N}$.

3. Propriétés du produit tensoriel

a) Si ***E*** et ***F*** sont de dimension finie N_E et N_F, la dimension de ***G*** = ***E***⊗***F*** est $N_G = N_E\, N_F$.

b) Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il est commode d'utiliser les notations compactes : $|u\rangle \otimes |v\rangle = |u\rangle |v\rangle = |u, v\rangle$.

c) Le produit scalaire hermitien de deux kets facorisés $|\phi\rangle = |u\rangle \otimes |v\rangle$ et $|\chi\rangle = |u'\rangle \otimes |v'\rangle$ se factorise et vaut : $\langle \chi | \phi \rangle = \langle u' | u \rangle \langle v' | v \rangle$.

4. Opérateurs dans l'espace produit tensoriel

Considérons maintenant deux opérateurs A_E et B_F agissant respectivement dans ***E*** et ***F***. On peut définir le produit tensoriel des opérateurs A_E et B_F : $C_G = A_E \otimes B_F$ par la règle :

$$(A_E \otimes B_F)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = (A_E |u\rangle) \otimes (B_F |v\rangle) \quad .$$

Cela permet de définir l'action de C_G sur les éléments de la base factoriée $\{|m\rangle \otimes |n\rangle\}$ et par conséquent sur tout vecteur de $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{F}$.

En particulier, nous pouvons *prolonger* l'opérateur A_E dans $\boldsymbol{G}$ par $A_E = A_E \otimes \boldsymbol{I}_F$, où $\boldsymbol{I}_F$ est l'opérateur identité dans $\boldsymbol{F}$.

5. Exemple simple : boîte cubique

Dans l'étude quantique d'une particule dans une boîte cubique tri-dimensionnelle de coté L, il est commode de séparer le mouvement de la particule suivant x, y, z et de chercher les solutions particulières de la forme :

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \psi_{n_1} \psi_{n_2} \psi_{n_3} \propto \sin(n_1 \pi x / L) \sin(n_2 \pi x / L) \sin(n_3 \pi x / L) \quad .$$

Dans la terminologie du produit tensoriel, ce sont des tenseurs décomposables. Une fonction d'onde générale peut alors s'écrire en fonction de cette base factorisée :

$$\psi(x, y, z) = \sum_{n_1, n_2, n_3} C_{n_1, n_2, n_3} \psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) \quad .$$

Des exemples plus subtils de produits tensoriels d'espaces de Hilbert concernent les cas de particules ayant des degrés de liberté internes, par exemple un spin.