Physique Quantique 1A

Florent Goutailler
florent.goutailler@ensea.fr - bureau 216

23 Avril 2013

Contexte historique

- 1922 : Stern et Gerlach - Institut de Physique Théorique de Francfort
- Objectif : vérification de la Théorie des Quanta

Intérêt dans le cadre du cours ?

- Mise en évidence de l'insuffisance de la mécanique classique
- Introduction progressive des différents concepts de la physique quantique

Dispositif expérimental

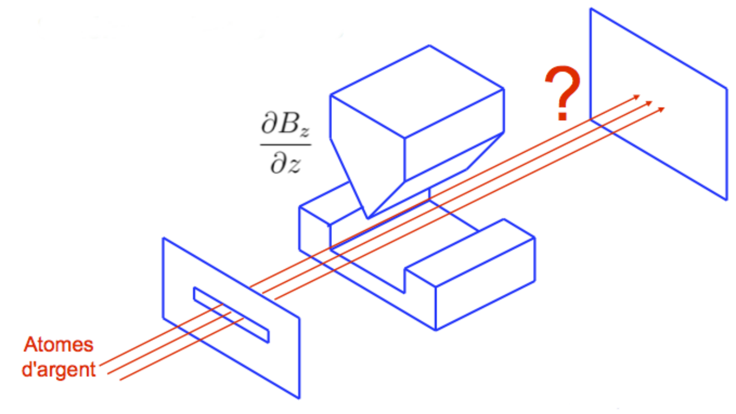


Figure 1 : Dispositif expérimental de Stern & Gerlach

Bilan des forces

- atomes Ag neutres $\Rightarrow$ pas de force de Lorentz
- Quel type de forces ?

Rappels moment magnétique $\vec{\mu}$

- Energie d'interaction : $W = -\vec{\mu}.\vec{B}$
- Couple : $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$
- Force : $\vec{F} = \sum_{i=x,y,z} \vec{\mu_i}.\vec{\nabla} B_i$
- Cas du circuit filiforme : $\vec{\mu} = I.\vec{S}$

- atome Ag $\Rightarrow$ moment magnétique $\vec{\mu}$?
- réflexion sur un cas simple : atome ^1H

Modèle de l'atome ^1H

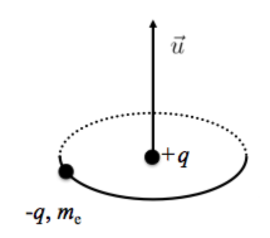


Figure 2 : Modèle ^1H

- charge +q à l'origine
- charge -q
  - mouvement circulaire uniforme
  - rayon $\vec{r}$ et vitesse $\vec{v}$
- moment magnétique ... calculs
- moment cinétique ... calculs

Modèle de l'atome ^1H - conclusion

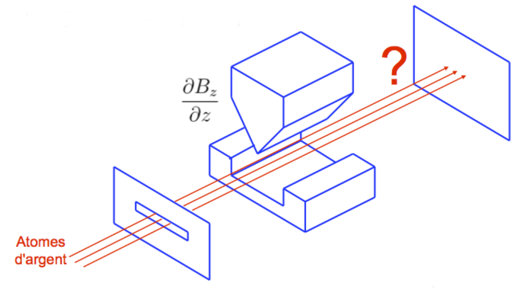
- ^1H possède un moment magnétique
- même hypothèse pour les atomes Ag

- relation entre moment magnétique et cinétique
  - $\boxed{\vec{\mu} = \gamma \vec{L}}$
  - γ : rapport gyromagnétique ($C.Kg^{-1}$ ou $Hz.T^{-1}$)
  - $\gamma(^1H) \approx 42,57 MHz/T$
  - $\gamma(e^-) \approx 28024,95 MHz/T$

Bilan des forces

Dispositif de Stern & Gerlach

- force : $\vec{F} = \sum_{i=x,y,z} \vec{\mu_i}.\vec{\nabla} B_i$
- considérations de symétrie + calculs ...
- $\vec{F_z} = \mu_z.\frac{\partial B_z}{\partial z}.\vec{e_z}$



Analyse de l'expérience

Dispositif de Stern & Gerlach

Mesure selon l'axe z du moment magnétique $\vec{\mu}$ des atomes

- hypothèses sur $\vec{\mu}$ pour les différents atomes Ag ?
    - même norme : $\vec{\mu_0}$
    - direction aléatoire

Résultats expérimentaux attendus

- absence de champ magnétique : tâche centrale
- présence du champ magnétique :
  - segment parallèle à z
  - extrémités correspondant à $\mu_z = \pm\mu_0$

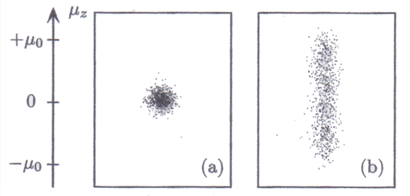


Figure 3 : Résultats expérimentaux attendus

Résultats expérimentaux

- absence de champ magnétique : tâche centrale
- présence du champ magnétique :
  - 1 tâche correspondant à $\mu_z = \mu_0$
  - 1 tâche correspondant à $\mu_z = -\mu_0$

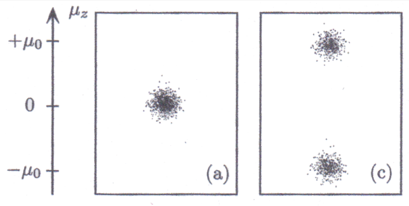


Figure 4 : Résultats expérimentaux

Conclusion

Conclusion

- quantification de la composante μ_z du moment magnétique des atomes Ag
- 2 valeurs possibles : $\mu_z = \mu_0$ ou $\mu_z = -\mu_0$
- contradiction avec les résultats prédits par la physique classique
- nécessité d'une nouvelle théorie/modélisation
- *physique quantique*

Lien avec l'expérience de Stern & Gerlach

- quantification du moment magnétique : $\mu_z = \pm\mu_0$
- $\vec{\mu} = \gamma\vec{L}$
- quantification du moment cinétique : $L_z = \pm L_0$

Origine : moments cinétique orbital des atomes Ag ?

Spin d'une particule

moment cinétique propre de chaque particule = le spin

2. Notion de spin

- 1.1. Introduction
- 1.2. Définition

Définition

Spin d'une particule

- moment cinétique propre ou intrinsèque
- notion purement quantique - *modélisation classique impossible !*

Exemple de nombre quantique de spin

pour l'ensemble des particules connues : $0 \leq s \leq 2$

- spin 0 : boson de Higgs, noyaux atomiques : ${}^{12}C$, ${}^{16}O$
- spin $\frac{1}{2}$: électron, proton, noyaux atomiques : ${}^{107}Ag$
- spin 1 : photon
- spin > 1 : 75% des isotopes stables

Projection du spin

- quantification $\forall$ la direction de projection $\vec{u}$ $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \ldots)$
- 2s+1 valeurs possibles : $-s \leq m_s \leq s$

Fonction d'onde - définition

Comment décrire l'état d'une particule ? (atomes Ag)

1er postulat de la mécanique quantique

La description complète de l'état d'une particule, dans l'espace, à l'instant t, se fait au moyen d'une fonction d'onde complexe : $\psi(\mathbf{r}, t)$

Exemples :

- onde de De Broglie : $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0.e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega.t)}$
- puits de potentiel : $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}.sin(\frac{n\pi.x}{a})$

Fonction d'onde - définition

Comment accéder aux différents paramètres (position, vitesse...) ?

Dualité onde-corpuscule ?

Probabilité de présence de la particule

La probabilité de trouver la particule à l'instant t dans un volume d^3r entourant le point $\mathbf{r}$ est :
$d^3P(\mathbf{r}) = \psi^*(\mathbf{r}, t).\psi(\mathbf{r}, t)d^3r = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$

Fonction d'onde - probabilité

Condition de normalisation

La probabilité de trouver la particule à l'instant t dans le domaine D de l'espace accessible doit être 1, donc :
$\iiint_D |\psi(\mathbf{r},t)|^2 d^3r = 1$

Fonction d'onde - interprétation

L'information sur la particule est complète :

- fonction d'onde = description complète de l'état de la particule à l'instant t
- 2 fonctions d'ondes différentes décrivent des états différents de la particule, sauf si : $\psi_1(\mathbf{r}, t) = e^{i\alpha}.\psi_2(\mathbf{r}, t)$

L'information est de nature probabiliste

- probabilité de présence de la particule $\neq$ localisation réelle
- manipulation d'amplitude et de densité de probabilité

Fonction d'onde & vecteur d'état

Définition - vecteur d'état ou *ket*

Les fonctions d'onde $\psi(\mathbf{r}, t) \in$ à un espace de Hilbert $\mathcal{E}_H \Rightarrow$ utilisation de la notation : $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{E}_H$

théorie matricielle - théorie ondulatoire

Fonction d'onde & vecteur d'état

Définition - 1er postulat de la mécanique quantique - principe de superposition

A chaque système physique est associé un espace de Hilbert $\mathcal{E}_H$.
L'état du système est défini à chaque instant t, par un vecteur normé $|\psi(t)\rangle$ de $\mathcal{E}_H$.

Définition - Condition de normalisation

La condition de normalisation se traduit par : $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ ou $||\psi|| = 1$

Espace dual $\mathcal{E}_H^*$

Définition - espace dual & bra

Soit $\mathcal{E}_H^*$ l'espace dual de $\mathcal{E}_H$ et $|\psi\rangle$ un ket de $\mathcal{E}_H$:

- à tout ket $|\phi\rangle$, on associe une forme linéaire de $\mathcal{E}_H^*$, notée $\langle\phi|$ et appelé *bra*
- Soit $\lambda \in \mathcal{C}$ et $|\psi\rangle$ un ket de $\mathcal{E}_H$. Alors au ket $|\phi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$ est associé le bra $\langle\phi| = \lambda^*\,\langle\psi|$
- action du bra $\langle\phi|$ sur un ket $|\psi\rangle$ = produit scalaire de $|\psi\rangle$ par $|\phi\rangle$: $\langle\phi|\psi\rangle$ avec $\langle\phi|\psi\rangle = \iiint_D \phi^*(\mathbf{r}).\psi(\mathbf{r})d^3r$

3. Théorie

- 1.1. Fonction d'onde
- 1.2. Notation de Dirac
- 1.3. Mesures

Notion d'observable

Rappel - Opérateur linéaire hermitique, notation de Dirac

- $\mathcal{A}$ est un opérateur hermitique ou autoadjoint si : $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\dagger$
- la matrice représentant $\mathcal{A}^\dagger$ est la conjuguée complexe de la transposée de $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}^\dagger_{ij} = \mathcal{A}^*_{ji}$
- les valeurs propres d'un opérateur hermitique sont réelles
- les vecteurs propres (valeurs propres distinctes) d'un opérateur hermitique sont orthogonales
- un opérateur hermétique est toujours *complètement* diagonalisable et on peut construire une *base orthonormée* à partir de la base des vecteurs propres

Notion d'observable

Définition - 2e postulat de la mécanique quantique - mesure des grandeurs physiques

A chaque grandeur physique mesurable A est associé : *un opérateur linéaire hermétique* $\mathcal{A}$ agissant dans $\mathcal{E}_H$ et appelé *observable*.

Notion d'observable

Définition - 3e postulat de la mécanique quantique - principe de quantification

Soit $|\psi\rangle$ l'état dans lequel se trouve le système au moment où l'on effectue la mesure A.

Quel que soit $|\psi\rangle$, les seuls résultats possibles de la mesure sont les valeurs propres a_α de l'observable $\mathcal{A}$

Notion d'observable

Définition - 4e postulat de la mécanique quantique - principe de décomposition spectrale

Soit $|\psi\rangle$ l'état dans lequel se trouve le système au moment où l'on effectue la mesure A.

La probabilité $P(a_\alpha)$ que le résultat de la mesure soit une valeur propre a_α de l'observable $\mathcal{A}$, associé au vecteur propre $|\phi_\alpha\rangle$ est donnée par :

$$P(a_\alpha) = \langle\psi|\phi_\alpha\rangle \langle\phi_\alpha|\psi\rangle = |\langle\phi_\alpha|\psi\rangle|^2$$

Notion d'observable

Définition - 5e postulat de la mécanique quantique - principe de réduction du paquet d'ondes

Immédiatement après une mesure A ayant donné une valeur a_α, le nouvel état du système $|\psi'\rangle$ est :

$$|\psi'\rangle = \frac{|\phi_\alpha\rangle}{||\phi_\alpha||}$$

La mesure perturbe le système : $|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle$

Notion d'observable

Définition - moyenne et variance d'une mesure

Soit $|\psi\rangle$ l'état dans lequel se trouve le système au moment où l'on effectue la mesure A (observable $\mathcal{A}$).

La valeur moyenne $\langle a\rangle$ et la variance Δa^2 des résultats de la mesure sont :

- $\langle a\rangle = \langle\psi|\mathcal{A}|\psi\rangle$
- $(\Delta a)^2 = \langle\psi|\mathcal{A}^2|\psi\rangle - \langle a\rangle^2$

4. Mise en cascade de dispositifs de S&G.

Configuration 1 : z-z

2 dispositifs de S&G orientés selon l'axe Oz :

- 1$^{\text{er}}$: sélection des spins dans l'état $|+z\rangle$
- 2$^{\text{ème}}$: mesure de l'état des spins $|+z\rangle$ ou $|-z\rangle$?
- quels doivent être les résultats de l'expérience ?

Calculs…

Configuration 2 : x-z

2 dispositifs de S&G orientés à 90˚:

- 1^{er} : sélection des spins dans l'état $|+x\rangle$
- $2^{\text{ème}}$: mesure de l'état des spins $|+z\rangle$ ou $|-z\rangle$?
- quels doivent être les résultats de l'expérience ?

Calculs. . .

Matrices de Pauli

Description de l'état de spin (photon, noyau...) :

$$\widehat{S_x} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{S_y} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{S_z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cf. TD

4. Mise en cascade de dispositifs de S&G.

Configuration 3 : x-z-x

3 dispositifs de S&G selon $\vec{x}$, $\vec{z}$ puis $\vec{x}$:

- 1$^{\text{er}}$: sélection des spins dans l'état $|+x\rangle$
- 2$^{\text{ème}}$: sélection des spins dans l'état $|+z\rangle$
- 3$^{\text{ème}}$: mesure de l'état des spins $|+x\rangle$ ou $|-x\rangle$?

Quels doivent être les résultats de l'expérience ?

Calculs...

Configuration 4 : x-x-z

Commutation des 2 derniers dispositifs :
3 dispositifs de S&G selon $\vec{x}$, $\vec{x}$ puis $\vec{z}$:

- 1er : sélection des spins dans l'état $|+x\rangle$
- 2ème : sélection des spins dans l'état $|+x\rangle$
- 3ème : mesure de l'état des spins $|+z\rangle$ ou $|-z\rangle$?

Quels doivent être les résultats de l'expérience ?

Calculs. . .

4. Mise en cascade de dispositifs de S&G.

- 4.1 Expérience à 2 dispositifs de S&G
- 4.2 Expérience à 3 dispositifs de S&G
- 4.3 Commutation d'opérateurs

Théorie

Définition - commutateur

Soit deux opérateurs $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ agissant sur l'espace des fonctions d'onde.
Leur commutateur, noté $[\widehat{A}, \widehat{B}]$, est défini par :
$[\widehat{A}, \widehat{B}] = \widehat{A}.\widehat{B} - \widehat{B}.\widehat{A}$

Théorie

Définition - commutateur

Soit deux opérateurs $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ agissant sur l'espace des fonctions d'onde.
Leur commutateur, noté $[\widehat{A}, \widehat{B}]$, est défini par :
$[\widehat{A}, \widehat{B}] = \widehat{A}.\widehat{B} - \widehat{B}.\widehat{A}$